

CHƯƠNG 4

NỘI SUY VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

4.1 NỘI SUY ĐA THỨC

4.1.1 Vấn đề nội suy

Trong thực tế nhiều khi phải phục hồi một hàm số $f(x)$ tại mọi giá trị của x trên đoạn $a \leq x \leq b$ mà chỉ biết một số hữu hạn giá trị của hàm số tại một số hữu hạn các điểm rời rạc của đoạn đó. Các giá trị đó được cung cấp qua thực nghiệm hay tính toán. Vậy ta có vấn đề toán học sau :

Trên đoạn $a \leq x \leq b$ có một lưới các điểm chia (ta gọi các điểm chia này là **nút**) $x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ tức là $a \leq x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$ tương ứng tại các x_i ta có giá trị của hàm số $y = f(x)$ là $y_i = f(x_i)$ như trên bảng sau:

Bảng 4-1

x	x_0	x_1	x_2	..	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	y_2	..	y_{n-1}	y_n

Bây giờ ta phải tìm hàm $f(x)$ dưới dạng một đa thức dựa vào bảng trên đây.

Giả sử ta xây dựng được đa thức bậc n : $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Sao cho $p_n(x)$ trùng với $f(x)$ tại các nút x_i , tức là $p_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Đa thức $p_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm $f(x)$. Ta chọn đa thức để nội suy hàm $f(x)$ vì đa thức là loại hàm đơn giản, luôn có đạo hàm và nguyên hàm, việc tính giá trị cũng dễ dàng. Ta có $p_n(x) = ((a_0x + a_1)x + a_2) \dots + a_n$ Do đó có sơ đồ Horner tính giá trị $p_n(c)$:

$$b_0 = a_0, b_1 = b_0c + a_1, b_2 = b_1c + a_2, \dots, b_n = b_{n-1}c + a_n = p_n(c)$$

4.1.2 Sự duy nhất của đa thức nội suy

Định lý 4.1 Đa thức nội suy $p_n(x)$ của hàm số $f(x)$ định nghĩa ở trên nếu có thì chỉ có một mà thôi.

Chứng minh: Giả sử có hai đa thức $p_n(x)$ và $q_n(x)$ cùng nội suy cho một hàm $f(x)$ Lúc đó ta phải có :

$$p_n(x_i) = y_i, q_n(x_i) = y_i$$

Vậy hiệu $p_n(x) - q_n(x)$ là một đa thức có bậc $\leq n$ lại triệt tiêu tại $n + 1$ giá trị khác nhau x_i vì $p_n(x_i) - q_n(x_i) = y_i - y_i = 0$. Do đó $p_n(x) - q_n(x)$ phải đồng nhất không, nghĩa là $p_n(x) \equiv q_n(x)$. Đa thức nội suy có thể xây dựng bằng nhiều cách, nhưng vì nó có tính duy nhất, nên tất cả các dạng của nó đều có thể *quy về nhau* được.

4.1.3 Đa thức nội suy Lagrangio

Dưới đây ta xây dựng đa thức nội suy theo kiểu Lagrangio. Gọi $L_i(x)$ là:

$$I_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$\text{Rõ ràng } I_i(x) \text{ là đa thức bậc } n \text{ và } I_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad (4-1)$$

Ta gọi đó là đa thức Lagrangio cơ bản.

Bây giờ ta thiết lập biểu thức

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i I_i(x) \quad (4-2)$$

Ta thấy $p_n(x)$ vừa là một đa thức bậc n vì các $I_i(x)$ có bậc n vừa thỏa mãn định nghĩa $p_n(x_j) = y_j$ vì (4-1). Vậy $p_n(x)$ xác định theo (4-2) là một đa thức nội suy. Ta gọi nó là *đa thức nội suy Lagrangio*.

4.1.4 Một số trường hợp hay gặp và thí dụ

1) Nội suy bậc nhất (nội suy tuyến tính)

Với $n = 1$ ta có lưới trong bảng dưới:

Bảng 4-2

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

Đa thức nội suy (4-2) sẽ là:

$$p_1(x) = y_0 I_0(x) + y_1 I_1(x) \quad (4-3)$$

$$I_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}; \quad I_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Do đó

$$p_1(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Đa thức $p_1(x)$ là bậc nhất đối với x có dạng $Ax + b$.

2) Nội suy bậc hai

Với $n = 2$ ta có lưới

Bảng 4-3

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

Đa thức nội suy (4-2) là :

$$p_2(x) = y_0 I_0(x) + y_1 I_1(x) + y_2 I_2(x) \quad (4-4)$$

$$I_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$I_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$I_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Đa thức $p_2(x)$ là một đa thức bậc hai đối với x có dạng $Ax^2 + Bx + C$.

3) *Thí dụ áp dụng*

Cho lưới

Bảng 4-4

x	1	2	3	4
y	17	27,5	76	210,5

Hãy thiết lập đa thức nội suy.

Giải : Ta có $n = 3$ đa thức nội suy là đa thức bậc ba. Theo (4-2) ta có:

$$p_3(x) = 17 \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 27,5 \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + 76 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 210,5 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

Sau khi rút gọn ta được :

$$p_3(x) = 8x^3 - 29x^2 + 41,5x - 3,5$$

4.1.5 Sai số nội suy và vấn đề chọn nút nội suy

Định lý 4-2. Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và có trong (a,b) đạo hàm đến cấp $n+1$ thì sai số nội suy $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ có biểu thức :

$$r_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{\pi(x)}{(n+1)!}, \quad c \in [a, b] \quad (4-5)$$

$$\text{Trong đó } \pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (4-6)$$

Định lý này có nghĩa là nếu tại một giá trị xác định $x \in [a,b]$ ta thay $f(x)$ bởi $p_n(x)$ cho đơn giản thì ta phạm phải một sai số tính bởi (4-5).

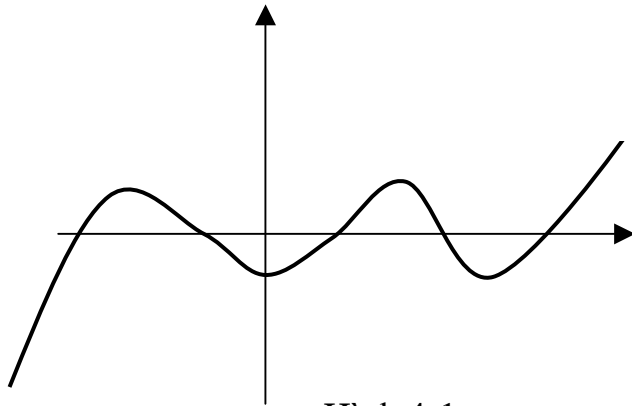
Chú thích : Sai số nội suy $r_n(x)$ phụ thuộc vào đa thức $\pi(x)$ tức là phụ thuộc sự phân bố các nút x_i trên đoạn $[x_0, x_n]$. Trong trường hợp các nút cách đều (hình 4-1 với $n = 4$) ta thấy $|\pi(x)|$ nhỏ khi x ở khoảng giữa của x_0, x_n lớn dần khi x ra gần hai nút và càng lớn khi x vượt ra ngoài khoảng đó. Vậy liệu có thể chọn các nút x_i không cách đều sao cho $|\pi(x)|$ "bé nhất" được không? Có câu trả lời là với $a = -1, b = 1$ thì các nút tối ưu đó là :

$$x_i = \cos \frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4-7)$$

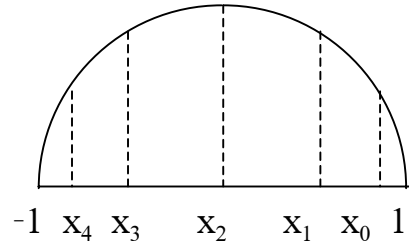
Đó là các nghiệm của đa thức Trêbư-sép: $T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} \cos[(n+1) \arccos x]$

Lúc đó ta có $|\pi(x)| = |T_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Các nút (4-7) thưa ở khoảng giữa đoạn $[-1, 1]$ và mau dần ở gần hai nút $-1, +1$ (hình 4-2).

Khi $a \neq -1$ và $b \neq 1$ ta dùng phép đổi biến $t = \frac{2x - a - b}{b - a}$ để đưa khoảng $a \leq x \leq b$ về khoảng $-1 \leq t \leq 1$ rồi chọn các nút t_i theo (4-7).



Hình 4-1



Hình 4-2

4.1.6 Nội suy bằng đa thức Niuton

Ta xét một phương pháp khác để tìm đa thức nội suy phương pháp Niuton.

- **Khái niệm tỷ hiệu**

Giả sử hàm $f(x)$ có lưới đã cho như trong bảng 4-1.

Tỷ hiệu cấp một của y tại x_i, x_j là :

$$y[x_i, x_j] = \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)}$$

Tỷ hiệu cấp hai của y tại x_i, x_j, x_k là

$$y[x_i, x_j, x_k] = \frac{(y[x_i, x_j] - y[x_j, x_k])}{(x_i - x_k)}$$

Và tiếp tục như thế ta có các tỷ hiệu cấp cao hơn.

Với $y(x) = P_n(x)$ là một đa thức bậc n thì tỷ hiệu cấp một tại x, x_0 là :

$$P_n[x, x_0] = \frac{[P_n(x) - P_n(x_0)]}{(x - x_0)}$$

là một đa thức bậc $n-1$. Tỷ hiệu cấp hai tại x, x_0, x_1 là :

$$P_n[x, x_0, x_1] = \frac{(P_n[x, x_0] - P_n[x_0, x_1])}{(x - x_1)}$$

Là một đa thức bậc $n-2$, v.v.. và tới tỷ hiệu cấp $n+1$ thì :

$$P_n[x, x_0, \dots, x_n] = 0$$

Từ các biểu thức trên ta suy ra:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x, x_0]$$

$$P_n[x, x_0] = P_n[x_0, x_1] + (x - x_1)P_n[x, x_0, x_1]$$

$$\begin{aligned}
P_n[x, x_0, x_1] &= P_n[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) P_n[x, x_0, x_1, x_2] \\
&\dots\dots\dots \\
P_n[x, x_0, \dots, x_{n-1}] &= P_n[x_0, \dots, x_n] + (x - x_n) P_n[x, x_0, \dots, x_n]
\end{aligned}$$

Chú ý đến $P_n[x, x_0, \dots, x_n] = 0$ ta rút ra :

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= P_n(x_0) + (x - x_0)P_n[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)P_n[x_0, x_1, x_2] + \dots \\
&\quad + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) P_n[x_0, \dots, x_n]
\end{aligned} \tag{4-8}$$

Nếu $P_n(x) = p_n(x)$ là đa thức nội suy của hàm $y = f(x)$ thì :

$$P_n(x_i) = p_n(x_i) = y_i \text{ với } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Do vậy các tỉ hiệu từ cấp một tới cấp n của P_n và y trong công thức (4-8) là trùng nhau.

Vì vậy thay cho (4-8) ta có :

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= y_0 + (x - x_0) y[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) y[x_0, x_1, x_2] + \dots \\
&\quad + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) y[x_0, \dots, x_n]
\end{aligned} \tag{4-9}$$

Đa thức này gọi là *Đa thức Niuton tiến* xuất phát từ nút x_0 của hàm $y = f(x)$.

Ta cũng tính được đa thức Niuton lùi xuất phát từ nút x_n của hàm $y = f(x)$ là :

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= y_n + (x - x_n) y[x_n, x_{n-1}] + (x - x_n)(x - x_{n-1}) y[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots \\
&\quad + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) y[x_n, \dots, x_0]
\end{aligned} \tag{4-10}$$

*** Chú ý :** 1) Theo định nghĩa tỉ hiệu có tính chất đối xứng :

$$\begin{aligned}
y[x_i, x_j] &= y[x_j, x_i] \\
y[x_i, x_j, x_k] &= y[x_k, x_j, x_i] \\
&\dots
\end{aligned}$$

2) Đa thức Niuton (4-9) trùng với đa thức Lagrangơ, nhưng thiết lập cách khác. Theo cách của Niuton khi thêm một nút x_{n+1} vào lưới nội suy ta chỉ phải thêm vào $p_n(x)$ một số hạng :

$$P_{n+1}(x) = p_n(x) + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n) y[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

mà không phải xây dựng lại tất cả các đa thức cơ bản như cách thiết lập của Lagrangơ.

4.1.7 Trường hợp nút cách đều

Giả sử các nút x_i cách đều, tức là :

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

1) Khái niệm sai phân tiến

Sai phân tiến cấp một tại i : $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Sai phân tiến cấp hai tại i : $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$

.....

Sai phân tiến cấp n tại i : $\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i)$

Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} y[x_0, x_1] &= \frac{\Delta y_0}{h} \\ y[x_0, x_1, x_2] &= \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2} \\ &\dots\dots \\ y[x_0, \dots, x_n] &= \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} \end{aligned}$$

Bây giờ ta đặt $x = x_0 + ht$ trong đa thức Niuton tiến (4-9) ta có :

$$p_n(x) \big|_{x=x_0+ht} = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (4-11)$$

Gọi là Đa thức Niuton tiến xuất phát từ x_0 trong trường hợp nút cách đều.

Với $n = 1$ ta có :

$$p_1(x) \big|_{x=x_0+ht} = y_0 + t\Delta y_0$$

Với $n = 2$ ta có :

$$p_2(x) \big|_{x=x_0+ht} = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0$$

2) Khái niệm sai phân lùi

Tương tự như khái niệm sai phân tiến ta có các sai phân lùi tại i được xác định :

$$\begin{aligned} \nabla y_i &= y_i - y_{i-1} \\ \nabla^2 y_i &= \nabla(\nabla y_i) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} \\ &\dots\dots \\ \nabla^n y_i &= \nabla(\nabla^{n-1} y_i) \end{aligned}$$

Ta có đa thức Niuton lùi xuất phát từ x_n trong trường hợp nút cách đều :

$$p_n(x) \big|_{x=x_0+ht} = y_n + t\nabla y_n + \frac{t(t+1)}{2!} \nabla^2 y_n + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} \nabla^n y_n \quad (4-12)$$

4.1.8 Thí dụ

Cho lưới giá trị (Đây cũng chính là các giá trị của hàm $\sin x$) :

Bảng 4-5

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,09983	0,19867	0,29552	0,38942

Hãy tính giá trị gần đúng tại $y(0,14)$ và $y(0,46)$

Giải : Dựa vào lưới ta tìm hàm y dưới dạng một đa thức nội suy.

Ta thấy các nút ở đây cách đều với $h = 0,1$ nên ta áp dụng đa thức Niuton.

Ta lập bảng sai phân :

Bảng 4-6

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0.1	<u>0.09983</u>			
1	0.2	0.19867	<u>0.09884</u>		
2	0.3	0.29552	0.09685	<u>-0.00199</u>	
3	0.4	<u>0.38942</u>	<u>0.09390</u>	<u>-0.00295</u>	<u>-0.00096</u>
i	x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$

a) Tính $y(0,14)$ vì $0,14 \leq 0,1 \leq 0,2$ nên ta dùng đa thức Niuton tiến xuất phát từ $x_0 = 0,1$ với $h = 0,1$ dựa vào các sai phân tiến đi xuống ở bảng 4-6 (gạch dưới một gạch) :

$$p(x) \Big|_{x=0,1+0,1t} = 0,09983 + 0,09884t - \frac{t(t-1)}{2!} 0,00199 - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} 0,00096$$

Ứng với $x = 0,14$ ta có $0,14 = 0,1 + 0,1t \Rightarrow t = 0,4$. Thay vào vế phải ta tính được $y(0,14) \approx p(0,1 + 0,1.0,4) = 0,13954336$.

Sai số tính theo công thức (4-5). Trường hợp này ta biết $y(x) = \sin x$ và $n = 3$ nên:

$$|\sin_{n+1}(x)| = |\sin^{(4)}(x)| = |\sin x| \leq 1$$

$$\pi(x) = (x - 0,1)(x - 0,2)(x - 0,3)(x - 0,4)$$

$$\pi(0,14) = (0,14 - 0,1)(0,14 - 0,2)(0,14 - 0,3)(0,14 - 0,4) \leq 10^{-4}$$

Theo (4-5) ta có $|\sin(0,14) - 0,13954336| \leq \frac{10^{-4}}{4!} \leq 4,2 \cdot 10^{-6}$

Ta thấy rằng số 0,13954336 có nhiều chữ số đáng nghi ta qui tròn đến 5 chữ số lẻ thập phân :

$$y(0,14) = \sin(0,14) = 0,13954 \pm 10^{-5}$$

b) Tính $y(0,46) = \sin(0,46)$. Vì $0,46 > 0,4$ ta dùng đa thức Niuton lùi xuất phát từ $x_3 = 0,4$. Dựa vào các sai phân lùi (gạch dưới hai gạch) trong bảng 4-6:

$$P(x) \Big|_{x=0,4+0,1t} = 0,38942 + t.0,09390 + \frac{t(t+1)}{2!} .0,00295 - \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} 0,00096$$

Với $x = 0,46$ ta có $0,46 = 0,4 + 0,1t \Rightarrow t = 0,6$. Thay $t = 0,6$ vào vế phải ở trên ta tính được : $\sin(0,46) \approx p(0,4 + 0,1.0,6) = 0,4439446$

Sai số tính theo (4-5) như trên ta có $|\sin(0,46) - 0,4439446| \leq 3,8 \cdot 10^{-5}$

Ta qui tròn đến 5 chữ số lẻ thập phân được $\sin(0,46) = 0,44394 \pm 10^{-5}$

Nhận xét : Sai số khi tính $\sin(0,46)$ gấp 5 lần khi tính $\sin(0,14)$. Bởi vì $0,46 \notin [0,1;0,4]$ tức là ta phải "ngoại suy" còn $0,14 \in [0,1;0,4]$ đúng là nội suy.

4.2 phương pháp bình phương bé nhất

4.2.1 Khái niệm

Giả sử có hai đại lượng (vật lý, hóa học, cơ học,...) x và y có liên hệ phụ thuộc nhau theo một dạng đã biết, chẳng hạn :

1. $y = a + bx$
2. $y = a + bx + cx^2$
3. $y = a + b \cos x + c \sin x$
4. $y = ae^{bx}$
5. $y = ax^b$

Nhưng chưa xác định cụ thể được hàm vì chưa tìm được các tham số a, b, c . Để xác định chúng ta phải xác định các cặp giá trị tương ứng (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Tức là phải biết một lưới gồm n nút xác định.

Bảng 4-7

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Dựa vào đó chúng ta xác định các tham số a, b, c bằng phương pháp bình phương bé nhất.

4.2.2 Trường hợp $y = a + bx$

Giả sử y phụ thuộc x dưới dạng $y = a + bx$ khi đó $y_i - (a + bx_i) = \varepsilon_i$; $i = 1, 2, \dots, n$ là các sai số tại x_i , do đó

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (4-13)$$

Là tổng các bình phương của các sai số. S phụ thuộc a, b còn các x_i, y_i đã biết.

Bây giờ ta xác định a, b sao cho S là bé nhất. Tức là tổng các bình phương của sai số là bé nhất. Như vậy a và b sẽ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad (4-14)$$

Tức là

$$\begin{cases} na + b \sum x_i = \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \quad (4-15)$$

Từ bảng 4-7 ta tính ra các tổng $\sum x_i, \sum y_i, \sum x_i^2, \sum x_i y_i$ thay vào hệ (4-15) rồi giải hệ đó ta tìm được a, b .

Thí dụ : Biết quan hệ giữa x và y có dạng $y = a + bx$ và có lưới sau :

x	-1,1	2,1	3,2	4,4	5,2
y	0,78	7,3	9,2	11,9	13,3

Hãy xác định a, b bằng phương pháp bình phương bé nhất.

Giải: Ta lập bảng các giá trị sau

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
n = 5	-1,1	0,78	1,21	-0,858
	2,1	7,3	4,41	15,33
	3,2	9,2	10,24	29,44
	4,4	11,9	19,36	52,36
	5,2	13,3	27,04	69,16
Σ	13,8	42,48	62,26	165,432

Từ bảng ta viết được hệ phương trình :

$$5a + 13,8b = 42,48$$

$$13,8a + 62,26b = 165,432$$

Giải hệ ta có $a = 2,9939036 \approx 3$; $b = 1,9935131 \approx 2$. Vậy có quan hệ là :

$$y = 3 + 2x$$

Ta thử tính lại các giá trị của y theo xi và so sánh với giá trị đã cho như bảng dưới đây :

x	-1,1	2,1	3,2	4,4	5,2
y	0,78	7,3	9,2	11,9	13,3
y mới	0,8	7,2	9,4	11,8	13,4

Ta thấy sai số là khá nhỏ $\approx 2\%$

4.2.3 Trường hợp các quan hệ khác

1) Trường hợp $y = a + bx + cx^2$ và $y = a + b \cos x + c \sin x$

Những trường hợp này đều có quan hệ tuyến tính đối với a, b, c nên cũng giải quyết như trường hợp trên. Chẳng hạn $y = a + bx + cx^2$ thì a, b, c là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} na + b \sum x_i + c \sum x_i^2 = \sum y_i \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

3) Trường hợp $y = ae^{bx}$ và $y = ax^b$

Các trường hợp này có quan hệ phi tuyến đối với a, b nên ta thực hiện một số biến đổi.

Đối với $y = ae^{bx}$ với $a > 0$

Lấy logarit thập phân hai vế ta có :

$$\lg y = \lg a + b \lg x$$

Đặt $\lg y = Y$, $\lg a = A$, $b \lg x = B$, $x = X$ ta có:

$Y = A + BX$ đây chính là dạng $y = a + bx$ ta đã xét ở trên, Chú ý rằng từ lưới số liệu x, y ta suy ra lưới số liệu X, Y với $X = x$; $Y = \lg y$. Từ đó ta tìm được A, B . Từ A, B ta tìm ra a, b .

Đối với $y = ax^b$ với $a > 0, x > 0$.

Lấy logarit hai vế ta có :

$$\lg y = \lg a + b \lg x$$

Đặt $\lg y = Y$, $\lg a = A$, $b \lg x = X$ ta có : $Y = A + BX$ ta lại giải quyết như trên.

BÀI TẬP

Câu 1 : Nội suy bằng đa thức Niuton để tìm x sao cho $f(x) = 3.756$. Biết bảng giá trị sau :

x	50	52	54	56
$f(x)$	3.684	3.732	3.779	3.825

Câu 2 : Tìm $f(x)$ tại $x = 0.15$. Biết:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1.0000	0.9975	0.9900	0.9776	0.9604

Câu 3 : Tìm số liệu còn thiếu trong bảng sau

x	0	1	2	3	4
y	1	3	9	?	81

Câu 4 : Biểu diễn phân thức $\frac{x^2 + 6x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ thành tổng các phân thức tối giản.

Câu 5 : Biết y có quan hệ với x dạng $y = a + bx + cx^2$ và đã biết lưới sau :

x	0.78	1.56	2.34	3.12	3.81
y	2.5	1.2	1.12	2.25	4.28

Hãy xác định hàm $y(x)$.

